Recuperación Primer Parcial

Fecha: 11/12/2024 **Apellido y Nombre:** |

Curso: **Legajo:**

1. Halle la curva ortogonal; a la familia de curvas en la que encada punto de las mismas tienen recta tangente de pendiente igual al producto de las coordenadas del punto; que pasa por $(2; 0)$

---

2. Para la función $f(x;y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-y} & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y \end{cases}$ a) Estudie continuidad y derivabilidad en el origen b) Indique si la función es diferenciable en el origen

---

3. Determine los puntos de la superficie definida por $x^2 - y^2 - 2z^2 = 30$ en el que el plano tangente es perpendicular a la recta tangente a la curva definida como intersección de las superficies $\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ z + 4 = y^2 + x \end{cases}$ en el punto $(1; 2; 1)$

---

4. Si $z(x; y) = f(x; y)$ viene definida implícitamente por la ecuación $z^2 e^{z-2} = xy^2$; determine una aproximación lineal para $f(x; y)$ en un entorno del punto $(1; 2)$

① Hallar la curva ortogonal a la familia de curvas en la que, en cada punto de las mismas, tiene recta tangente de pendiente igual al producto de las coord. del punto que pase por (2,0)

Hallo ecuación de la familia de curvas en las que cada punto tiene recta tang. con pendiente igual al producto de las coord en el punto

pendiente $y' = xy \longrightarrow y'_{\perp} = \frac{-1}{y'} = \frac{-1}{xy} = \frac{dy}{dx} \longrightarrow -\frac{1}{x}dx = y\,dy$

integro m.a.m $\rightarrow -\ln(|x|) + C = \frac{y^2}{2}$

$-2\ln(|x|) + k = y^2$

$\boxed{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) + k = y^2}$

pasa por $(2,0) \rightarrow x=2 \rightarrow y=0$

$k = \ln(4) \longleftarrow \ln\left(\frac{1}{2^2}\right) + k = 0^2$

$\boxed{y^2 = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) + \ln(4)}$

---

② Para la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$

a) estudiar continuidad y derivabilidad en el origen

Cont: $f(0,0) = 0$ ✓

¿∃ lim? $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \underset{\text{si } x\neq y}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x-y} \xrightarrow{\text{si } x=0} \lim = 0$

$\boxed{\text{si } y = x + x^2}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x-(x+x^2)} = -1$ $\neq$

∄ lim en (0,0) → f no es cont

Deriv.

$f'((0,0),(a,b)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)}{h} \xrightarrow{\text{si } a\neq b} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \cdot \frac{h^{\cancel{2}}a^2}{ha-hb} = \frac{a^2}{a-b}$

$\xrightarrow{\text{si } a=b} \lim_{h\to 0} 0$

$\boxed{f'((0,0),(a,b)) = \begin{cases} \frac{a^2}{a-b} & \text{si } a\neq b \\ 0 & \text{si } a=b \end{cases}}$ → es derivable

b) ¿es diferenciable en el origen? NO → $f'((0,0)(a,b))$ NO es combinación lineal del gradiente por versor

NOTA

③ Determinar los puntos de la sup. definida por $x^2-y^2-2z^2=30$ en el que el plano tangente es perpendicular a la recta tangente a la curva

$$C: \begin{cases} x+y+2z=5 \\ z+4 = y^2+x \end{cases}$$ en el punto $(1,2,1)$

Plano tangente a $x^2-y^2-2z^2=30$: $N_{PT}=(2x,-2y,-4z)$

Dirección recta tang. a C : $\begin{cases} G(x,y,z) = x+y+2z-5 \\ H(x,y,z) = z+4-y^2-x \end{cases}$

$\nabla G_{(1,2,1)} = (1,1,2)$

$\nabla H_{(1,2,1)} = (-1,-2y,1)\Big|_{(1,2,1)} = (-1,-4,1)$

$\nabla G \times \nabla H$ en $(1,2,1) \longrightarrow tg \rightarrow$ dirección $=(9,-3,-3)$

Plano tang $\perp$ la tang curva $\Rightarrow N_{PT} \parallel tg$

$$\Rightarrow (2x,-2y,-4z) = k(9,-3,-3)$$

$$\begin{cases} 2x = 9k \longrightarrow \boxed{2/3\ x = 3k} \\ -2y = -3k \\ -4z = -3k \end{cases} \quad \begin{matrix} 2y = 3k \\ 4z = 3k \end{matrix} \quad 2y = 4z \quad \boxed{y = 2z}$$

$\frac{2}{3}x = 2y \rightarrow \boxed{x = 3y}$ $\quad \boxed{x = 6z}$

$x^2-y^2-2z^2=30$

$(6z)^2-(2z)^2-2z^2=30$

$36z^2-4z^2-2z^2=30$

$30z^2=30 \rightarrow z^2=1 \longrightarrow \begin{matrix} z=1 \\ z=-1 \end{matrix}$

$\boxed{z=1} \rightarrow y=2z=2$, $\boxed{x=6z=6} \rightarrow \boxed{P_1=(6,2,1)}$

$\boxed{z=-1} \rightarrow y=2z=-2 \rightarrow x=-6$ $\quad \boxed{P_2=(-6,-2,-1)}$

NOTA

AM2	Recuperatorio 1° Parcial prof Hernandez	HOJA N° 2/2 FECHA 11/12/24

④ Si $z=f(x,y)$ viene definida implícitamente por la ecuación $z^2 e^{z-2} = xy^2$, determinar una aproximación lineal para $f(x,y)$ en un entorno del punto (1,2)

x TFI : $G(x,y,z) = -xy^2 + z^2 e^{z-2}$

$\rightarrow f'_x = \frac{-G'_x}{G'_z} \qquad f'_y = -\frac{G'_y}{G'_z}$

$G'_x(x,y,z) = -y^2$

$G'_y = -2xy$

$G'_z = 2z e^{z-2} + z^2 e^{z-2}$

Hallo z : $G(1,2,z_0) = 0 = -2^2 + z_0^2 e^{z_0-2} =$

punto $(1,2,z_0)$ $= -4 + z_0^2 e^{z_0-2}$ $\rightarrow z_0 = 2$ es solución

$\boxed{P = (1,2,2)}$

$G'_x(1,2,2) = -4$

$G'_y(1,2,2) = -2 \times 1 \times 2 = -4$

$G'_z(1,2,2) = 2 \times 2 \times \underbrace{e^{2-2}}_{1} + 2^2 \underbrace{e^{2-2}}_{1} = 8$

$f'_x(1,2) = \frac{-4}{8} = -1/2$

$f'_y(1,2) = \frac{-4}{8} = -1/2$

$f(1,2) = z_0 = 2$

$z = f(1,2) + f'_x(1,2)(x-1) + f'_y(1,2)(y-2) =$

$= 2 + (-1/2)(x-1) + (-1/2)(y-2) =$

$= 2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \frac{y}{2} + 1$

$$\boxed{z = -\frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{7}{2}}$$

NOTA